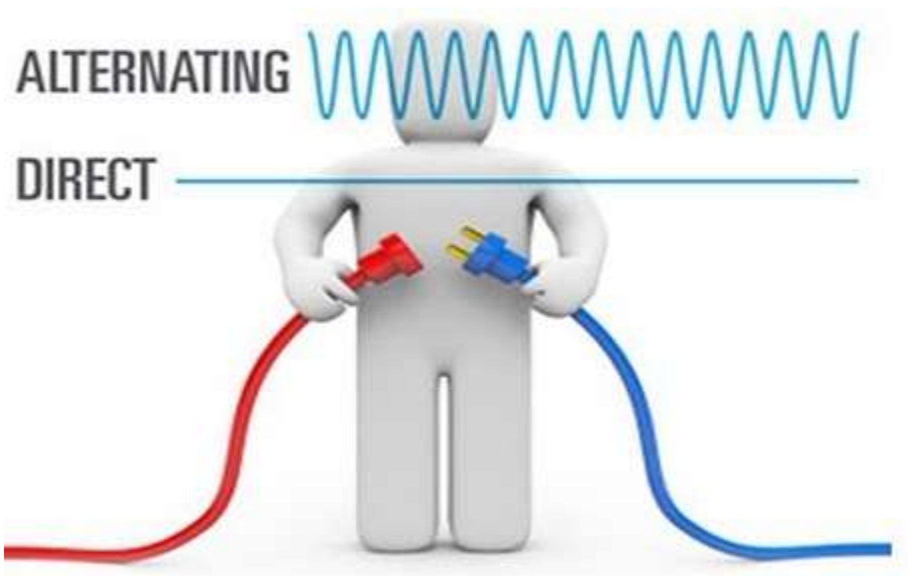
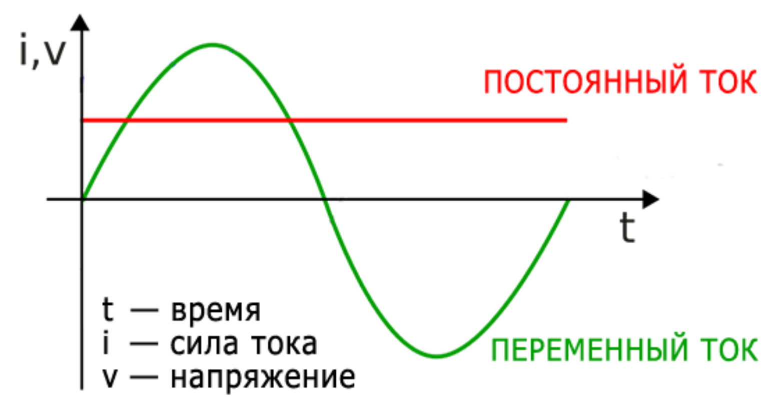
Электротехниканың физика-математикалық негіздері

Тарау-2 – Айнымалы тоқтар



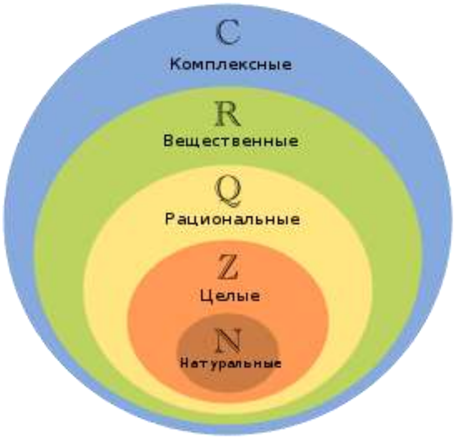


Электротехниканың физика-математикалық негіздері

Дәріс-3 – Комплекті сандар. Комплексті сандардың алгебралық формасы және соған қолданылатын арифметикалық амалдар. Комплексті сандардың тригонометриялық және көрсеткіштік формалары. Модуль және аргумент.

Комплекс сандар

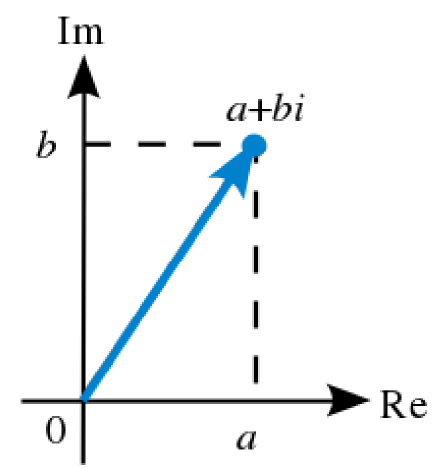
Комплекс сандар д-з $a+bi$ түрінде жазылатын сандар. Мұндағы a және b нақты сандар, i – жорамал бірлік, $i^2 = -1$.



Комплекс сандар жиынтығы әдетте $\mathbb{C}$ символымен белгіленеді.

a шамасы z санының нақты бөлігі болып табылады және $Re\ z$ or $Re(z)$ деп белгіленеді.

b шамасы z санының жорамал бөлігі болып табылады және $Im\ z$ or $Im(z)$ деп белгіленеді.



Комплекс санның геометриялық түрде сипатталуы

Комплекс сандарға қолданатын амалдар. Қосу, алу.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Кез келген *u*, *v*, *w* комплекстердің негізгі қосу қасиеттері:

Қасиеттері	Алгебралық жазуы
Коммутативтігі	$u+v=v+u$
Ассоциативтілігі	$u+(v+w)=(u+v)+w$
Нөлдің қасиеті	$u+0=u$
Қарама қарсы элементтің қасиеті	$u+(-u)=0$
Қосуды алу арқылы орындау	$u-v=u+(-v)$

Комплекс сандарға қолданатын амалдар. Көбейту.

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=$$

$$=(ac+bdi^2)+(bc+ad)i=(ac-bd)+(bc+ad)i$$

Кез келген *u*, *v*, *w* комплекстердің негізгі көбейту қасиеттері:

Қасиеттері	Алгебралық жазуы
Коммутативтігі	$u\cdot v=v\cdot u$
Ассоциативтілігі	$u\cdot(v\cdot w)=(u\cdot v)\cdot w$
Бірлік қасиеті	$u\cdot 1=u$
Нөлдің қасиеті	$u\cdot 0=0$
Қосуға қатысты көбейтудің дистрибутивтілігі	$u\cdot(v+w)=u\cdot v+u\cdot w$

Комплекс сандарға қолданатын амалдар. Бөлу.

$\bar{z} = x - iy$ комплекс саны $z = x - iy$ комплекс санының түйіндесі д.а. Кез келген (нөлдіктен басқа) $a + bi$ комплекс санынына кері $\frac{1}{a+bi}$ комплекс санын табуға болады, табу үшін қолданылатын амалдар:

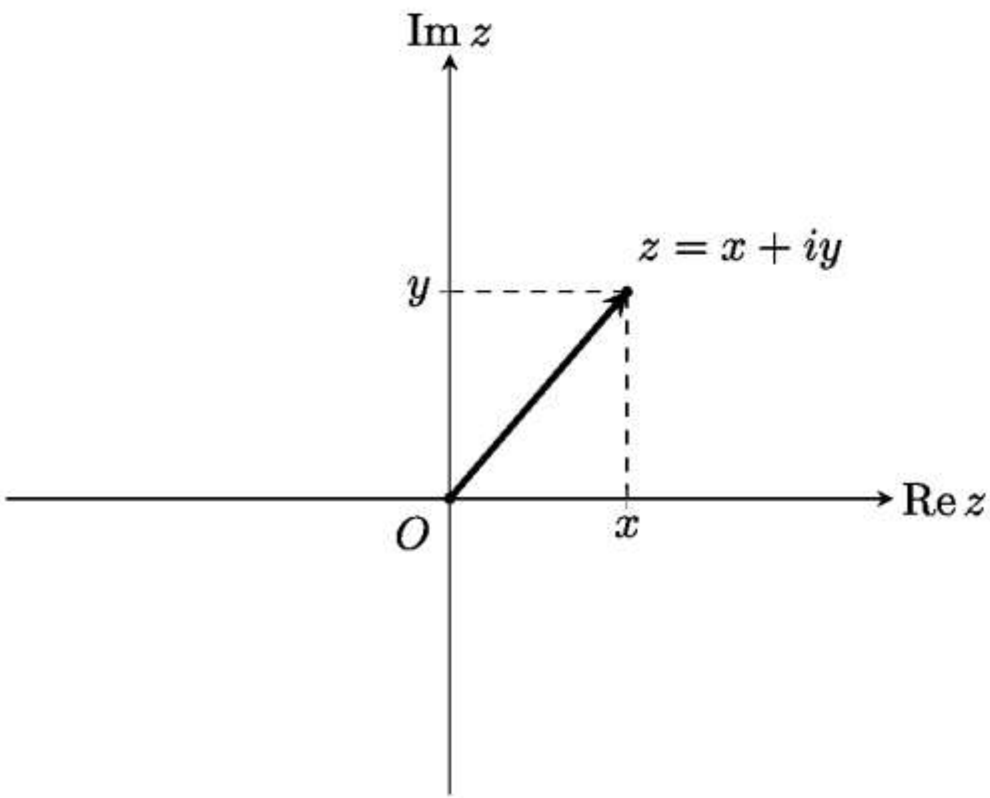
$$\frac{1}{(a+bi)} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

пример,

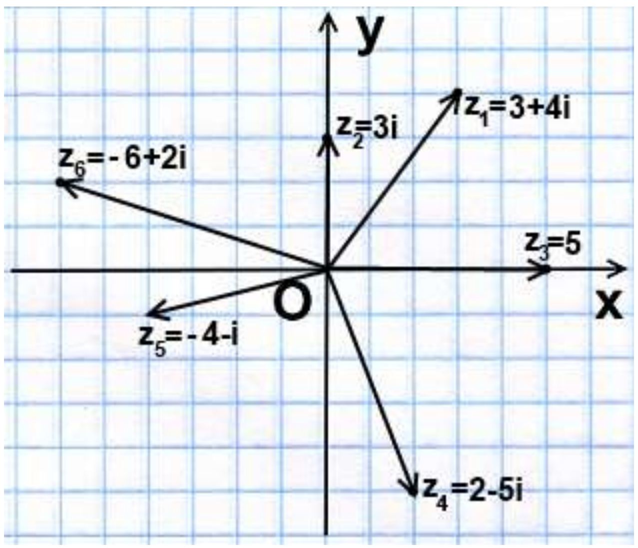
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i$$

Комплекстік кеңістік

Комплекстік кеңістік – $\mathbb{C}$ комплекстік сандар жиынтығының геометриялық көрінісі. $z = x - iy$ комплекс санына (x,y) координаттары сәйкес келетін радиус-вектор.

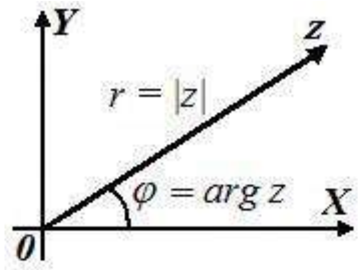


мысал



Комплекс (кешен) санның аргументі

Комплексті сандардың модулі деп комплекс жазықтығындағы ,



Модуль және аргументі

Модуль *r* және комплекс санының *φ* аргументі

Комплекс (кешен) санның аргументі

Нөл емес комплекс санның аргументі деп нүктенің радиус-векторы мен оң бағытты нақты жартылай өстің арасындағы бұрыш. z санының аргументі радианмен өлшенеді және Arg(z) деп белгіленеді.

$$tg\,\varphi = \frac{y}{x};\ cos\,\varphi = \frac{x}{|z|};\ sin\,\varphi = \frac{y}{|z|}$$

Аргументтің қасиеттері:

1. Кері санның аргументі шығыс аргументтен таңбамен ерекшеленеді

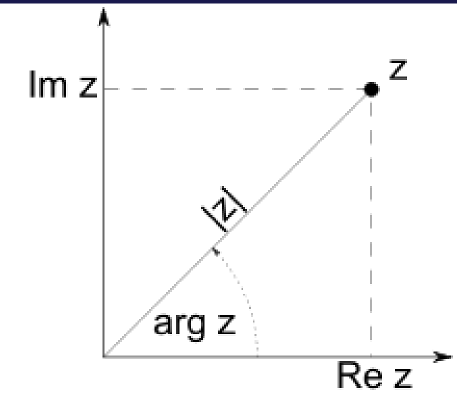
$$Arg\left(\frac{1}{z}\right) = -Arg(z);$$

2. Аргументің көбейтіндісі аргументтің көбейткіштері суммасына тең.

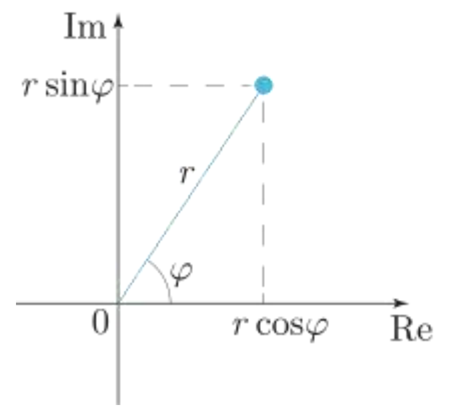
$$Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2);$$

3. Аргументті бөлуі аргументтердің бөлінетіні мен бөлгішінің айырмасына тең

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) + Arg(z_2);$$

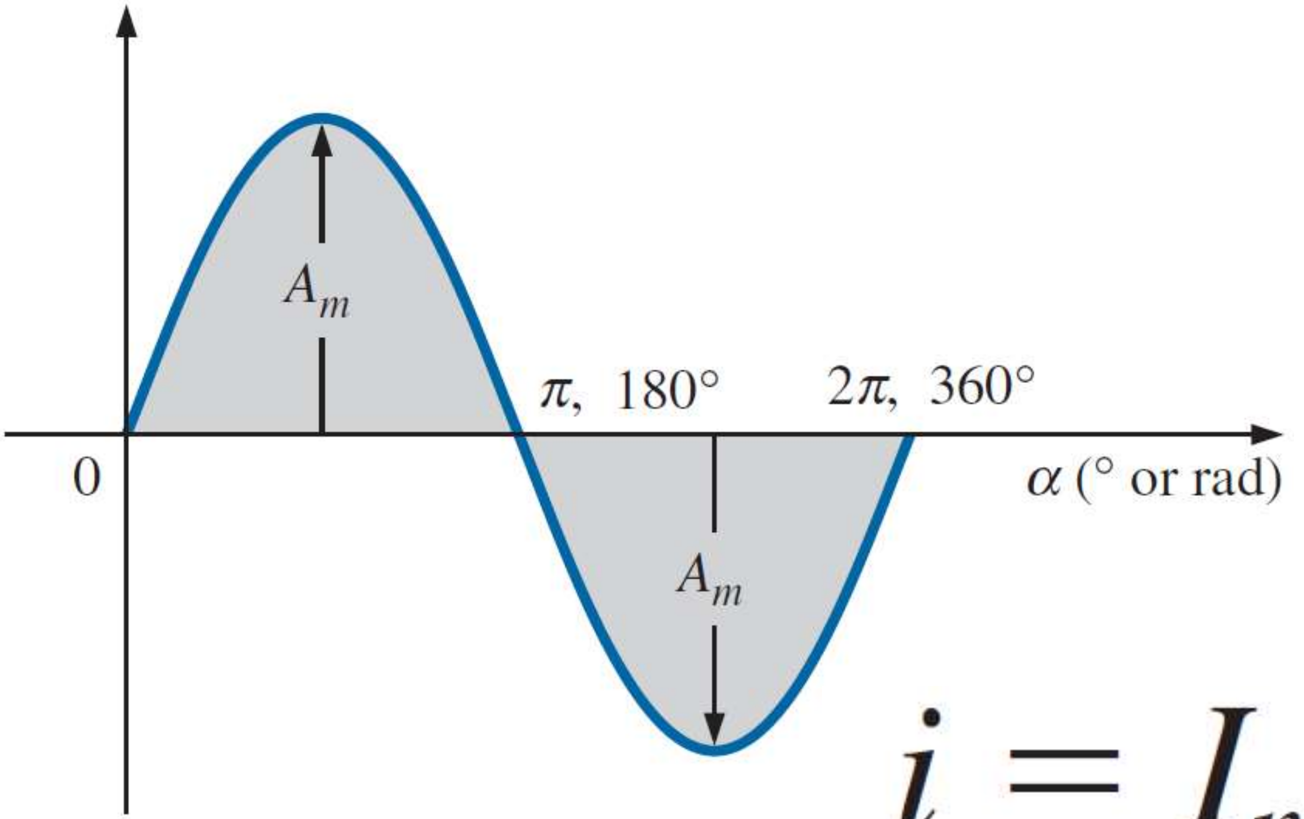


Модуль, аргументі, нақты және жорамал бөлігі



Модуль r және комплекс санының φ аргументі

Айнымалы кернеу және ток



$$i = I_m \sin \omega t$$

$$e = E_m \sin \omega t$$

Период және жиілік

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

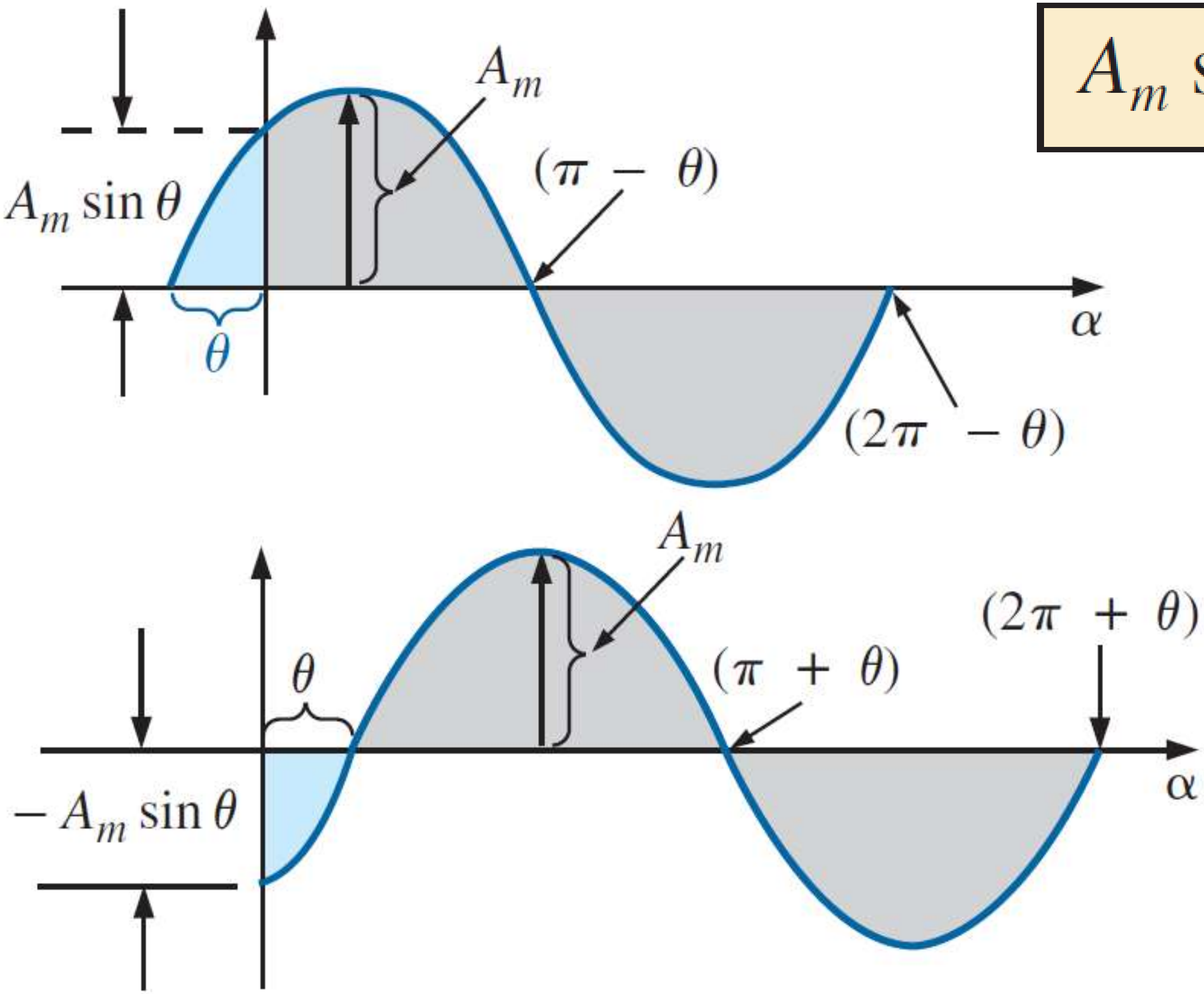
Әсерлік мән

$$I_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m = 0.707 I_m$$

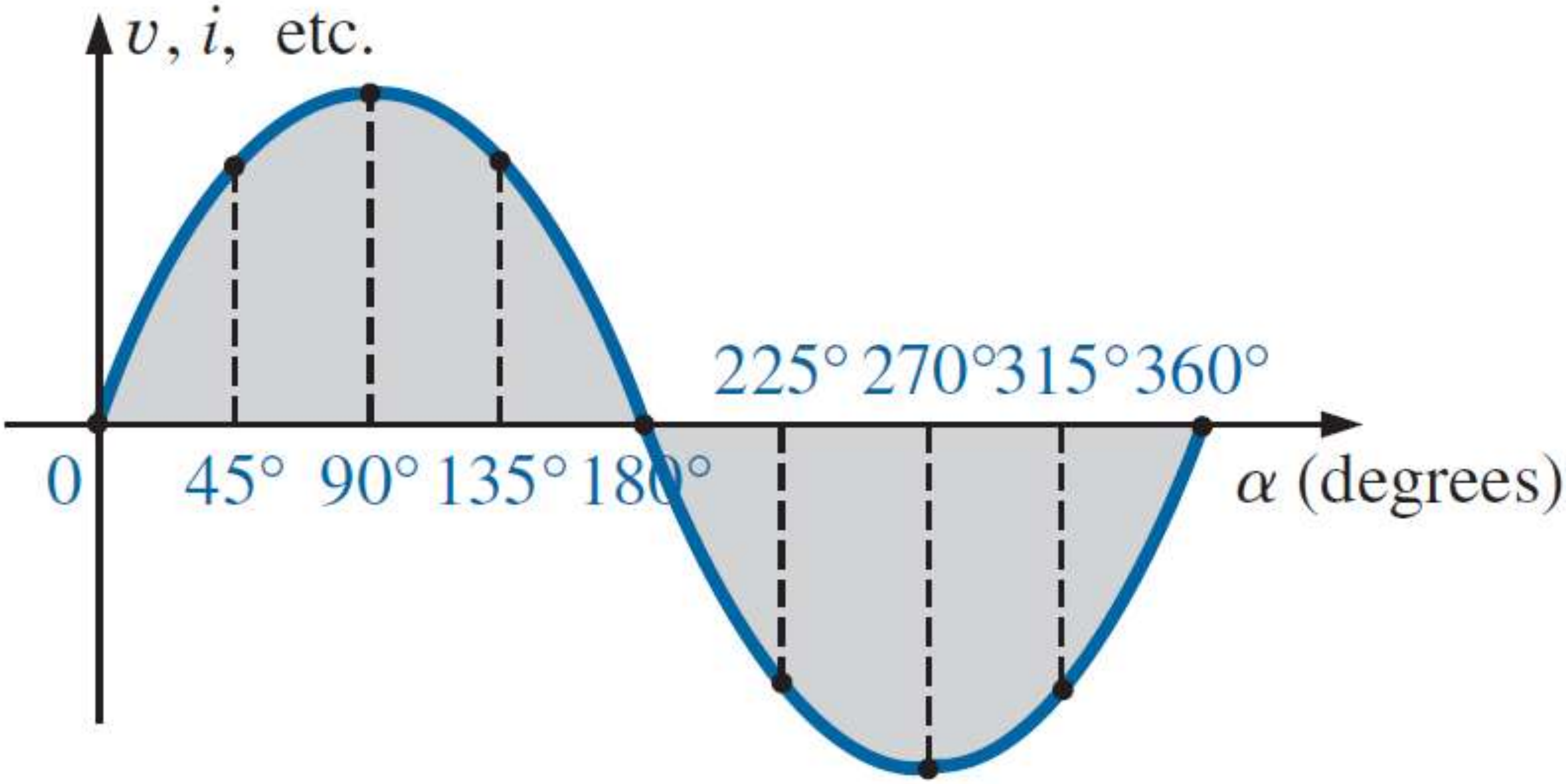
$$E_{\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_m = 0.707 E_m$$

Фазалық ығысу

$$A_m \sin(\omega t \pm \theta)$$



Бұрышты анықтау



Комплекс сан

$i^2 = -1$ теңдігі орындалатын нақты және жорамал бөліктен тұратын сан.

$$a + bi$$

In our analysis of dc networks, we found it necessary to determine the algebraic sum of voltages and currents. Since the same will also be true for ac networks, the question arises, How do we determine the algebraic sum of two or more voltages (or currents) that are varying sinusoidally? Al-

Комплекс сандарға арифметикалық амалдар қолдану

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i,$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i.$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)= \ ?$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\,(c-di)}{(c+di)\,(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

$$\frac{2+5i}{3-4i}= \ ?$$

Комплекс сандарға арифметикалық амалдар қолдану

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i,$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i.$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=$$ **?**

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\,(c-di)}{(c+di)\,(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

$$\frac{2+5i}{3-4i}=-\frac{14}{25}+\frac{23}{25}i$$

Комплекс сандардың негізгі қасиеті

$$i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1; i^5 = i$$

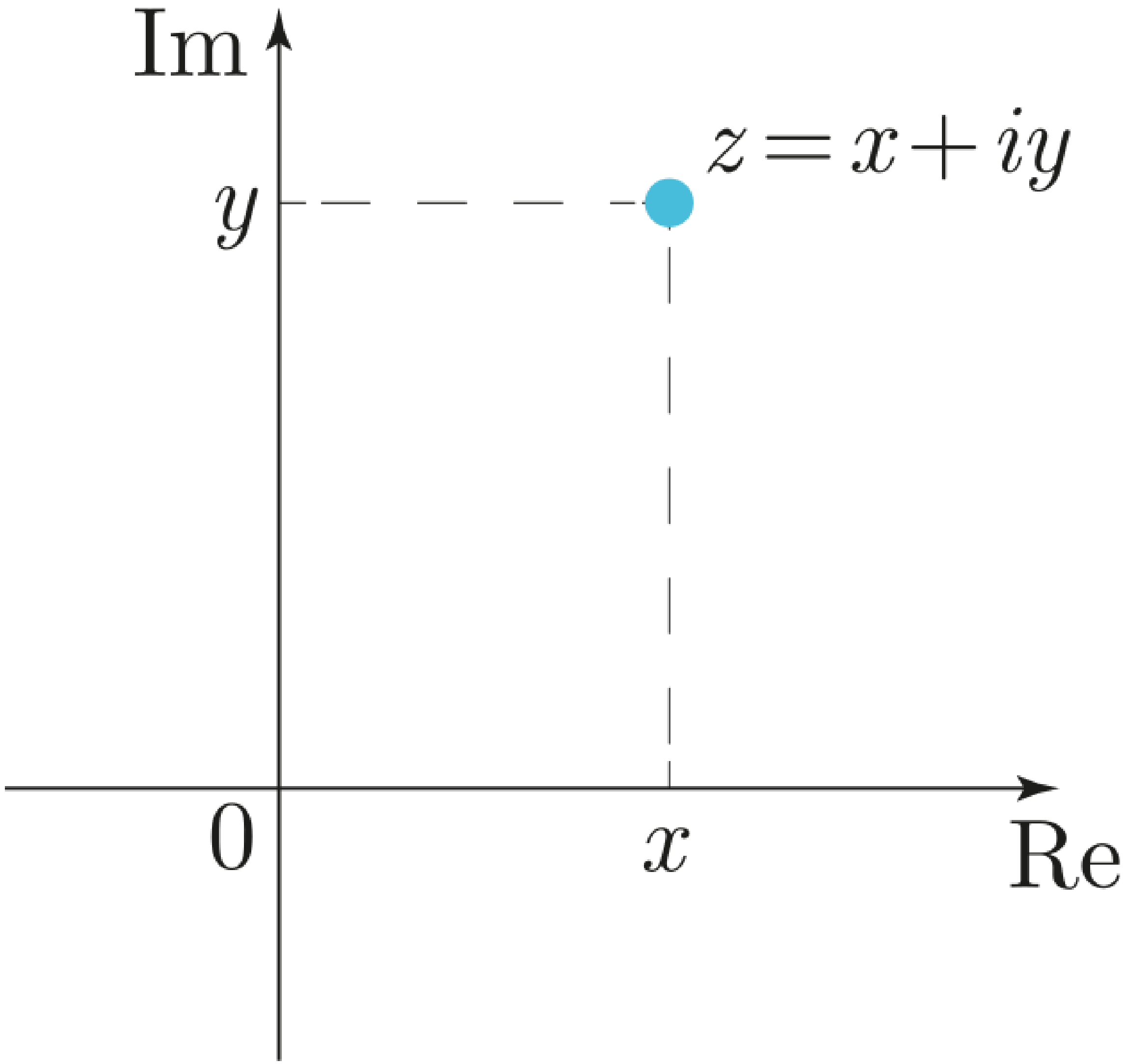
Белгіленуі:

$\mathbf{C} = X + jY$

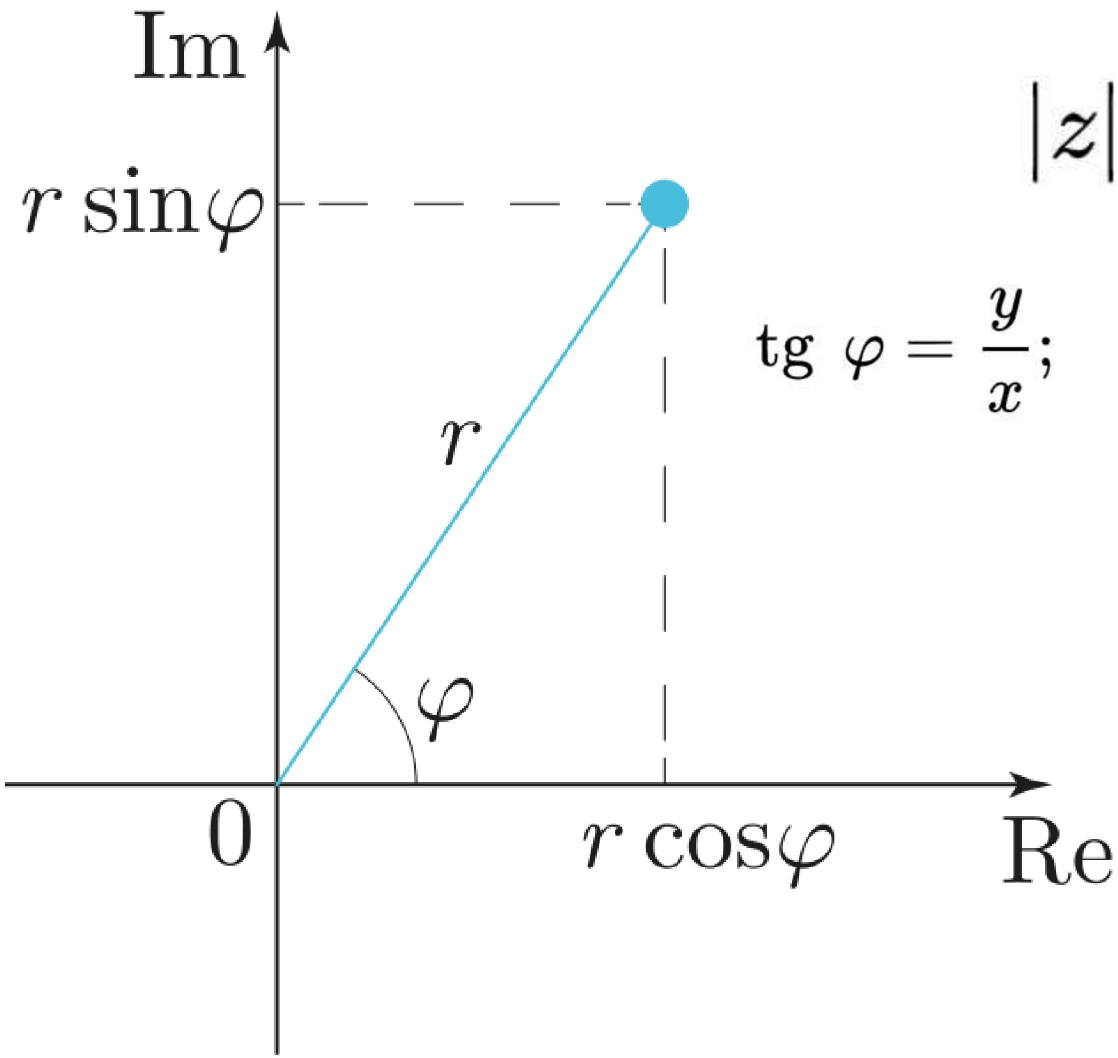
$\dot{C} = X + jY$

$\underline{\mathbf{C}} = X + jY$

Комплексті жазықтық



Комплекс санның модулі мен аргументі



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{|z|}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{|z|}$$

Комплекс сандардың формалары

Алгебралық формасы:

$$x + iy$$

Тригонометриялық формасы:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

Көрсеткіштік формасы:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$ **Эйлер теңдеуі**

$$z = re^{i\varphi}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Мысал

Келесі комплекстік санды тригонометриялық және көрсеткіштік түрге келтіріңіз:

$$z = -1 - \sqrt{3}i$$

Мысал

Келесі комплекстік санды тригонометриялық және көрсеткіштік түрге келтіріңіз:

$$z = -1 - \sqrt{3}i$$

$$z = 2\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{-2\pi}{3}}$$

Мысал

Келесі комплекстік сандарды қосып комплексті жазықтыққа салыңыз:

$$\mathbf{C}_1 = 2 + j4$$
$$\mathbf{C}_2 = 3 + j1$$

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \ ?$$

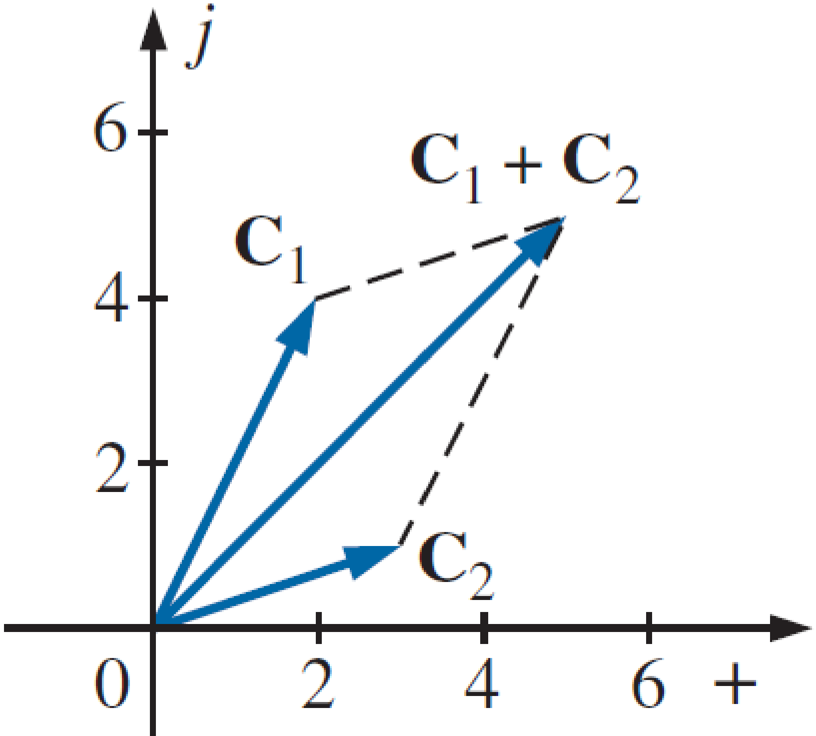
Мысал

Келесі комплекстік сандарды қосып комплексті жазықтыққа салыңыз:

$$\mathbf{C}_1 = 2 + j4$$
$$\mathbf{C}_2 = 3 + j1$$

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \ ?$$

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \mathbf{5 + \mathit{j}5}$$



Көрсеткіштік формадағы косплексті сандарды көбейту/бөлі

$$\boxed{\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{C}_2 = Z_1 Z_2 \,\underline{/\theta_1 + \theta_2}}$$

$$\boxed{\frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2} = \frac{Z_1}{Z_2}\,\underline{/\theta_1 - \theta_2}}$$

Мысал

a. $(4.2 + j6.8) + (7.6 + j0.2)$

b. $(142 + j7) + (9.8 + j42) + (0.1 + j0.9)$

c. $(4 \times 10^{-6} + j76) + (7.2 \times 10^{-7} - j5)$

d. $(9.8 + j6.2) - (4.6 + j4.6)$

e. $(167 + j243) - (-42.3 - j68)$

f. $(-36.0 + j78) - (-4 - j6) + (10.8 - j72)$

g. $6 \angle 20^\circ + 8 \angle 80^\circ$

h. $42 \angle 45^\circ + 62 \angle 60^\circ - 70 \angle 120^\circ$